ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Def: Una ecuación trigonométrica, es una igualdad que contiene una o varias líneas trigonométricas de arcos desconocidos y que se verifica solo para los valores particulares de dichos arcos.

Resolver una ecuación trigonométrica, es determinar los valores del arco desconocido.

ECUACIONES CON UNA INCÓGNITA.

Método general: El método más general para resolver una ecuación con una incógnita consiste en reducirla a una ecuación algebraica, tomando una línea trigonométrica por incógnita auxiliar.

1) Se elige por incógnita, ya sea una línea trigonométrica del arco desconocido, o una línea trigonométrica de un múltiplo o de un submúltiplo de este arco, o de cualquier arco cuyo conocimiento traería consigo el arco pedido.

2) se reemplazan en función de la incógnita adoptada todas las otras líneas trigonométricas que figuran en la ecuación.

3) Por medio de los procedimientos ordinarios del álgebra se resuelve la ecuación final con respecto a la incógnita auxiliar y se discuten las raíces tomando en cuenta las condiciones de magnitud a las cuales está sujeta esta línea trigonométrica.

4) Cada una de las raíces aceptables, produce una ecuación trigonométrica simple de una de las formas:

$\sin x = a$ $\qquad\qquad$ $\cos x = b$ $\qquad\qquad$ $\tan x = c$

Se determina por medio de la table de valores (o de una calculadora), un ángulo que verifique cada una de estas ecuaciones, después de lo cual las fórmulas de los arcos que tienen una línea trigonométrica dada, permiten escribir todas las soluciones.

Ejemplo:

Resolver la ecuación:

$$3\tan^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x}$$

Método 1.

Tomamos como incógnita cosx y reemplazamos tanx, en función de cosx, por lo tanto la ecuación se transforma en:

$$\frac{3(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} + 5 = \frac{7}{\cos x}$$

$$\frac{2\cos^2 x - 7\cos x + 3}{\cos^2 x} = 0$$

$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$$

Esta ecuación tiene como raíces 3 y 1/2

La primera se descarta ya que es mayor que la unidad.

La ecuación entonces equivale a:

$\cos x = 1/2$

Esta ecuación se verifica para $x=60°$, y en consecuencia para todos los arcos comprendidos en la fórmula:

$x = 2k\pi \pm \pi/3$

Método 2.
Reemplazamos cosx en función de tanx, la ecuación, entonces se convierte en:

$$3tan^2x + 5 = \pm\sqrt{1 + tan^2x}$$

pero esta ecuación no es equivalente a la propuesta, ya que con las soluciones de ésta, admite todavía las soluciones de la ecuación:

$$3tan^2x+5 = -\frac{7}{cosx}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros, llegamos a la ecuación:
$9tan^4x - 19tan^2x - 24 = 0$
de donde sacamos:

usando $u = tan^2x$

$$9u^2 - 19u - 24 = 0$$

$$u = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-24)}}{18}$$

$$u = \frac{19 \pm \sqrt{361 + 864}}{18}$$

$$u = \frac{19 \pm \sqrt{1225}}{18}$$

$$u = \frac{19 \pm 35}{18}$$

$$u_1 = \frac{54}{18} = 3 \qquad u_2 = \frac{-16}{18} = -\frac{8}{9}$$

luego

$$tanx = \pm\sqrt{3} \qquad tanx = \pm\sqrt{-\frac{8}{9}} \quad \text{que se elimina por ser negativa}$$

de donde finalmente

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

Siendo esencialmente positivos los primeros miembros de las ecuaciones y siendo sus segundos miembros de signos contrarios, una solución comprendida en las fórmulas finalmente encontradas convierten a las ecuaciones (1) o (3) según que ella haga positivo a cosx o -cosx, es decir, según que el coseno del arco considerado, sea positivo o negativo.
Ahora bien, los arcos comprendidos en las fórmulas (4) terminan en cuatro puntos del círculo trigonométrico, respectivamente situados en cada uno de los cuatro cuadrantes.
Los arcos:
$(2k+1)\pi \pm \pi/3$
cuyos extremos caen en el segundo y tercer cuadrante tienen sus cosenos negativos y deben ser desechados. Los arcos:
$2k\pi \pm \pi/3$ terminados en el primer y tercer cuadrante, son los únicos que la satisfacen.

Ejercicios:
Resolver las ecuaciones trigonométricas:
1) $2cosx + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$

$S=\{4k\pi \pm 2\pi/3\}$

2) $3(1-cosx) = sin^2x$
$S=\{2k\pi\}$

3) sin3x = sinx

S={kπ, (2kπ1)π/4}

Aplicaciones:

Resolver la ecuación

1) asinx + bcosx = c

2) atanx + bcotx = c

3) acos x + bcos(α-x) = m

SISTEMAS DE ECUACIONES

1) Resolver el sistema:

$$x + y = a$$
$$sinx + siny = m$$

La segunda ecuación puede escribirse

$$2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = m$$

de donde se saca, teniendo en cuenta la primera

$$2sin\frac{a}{2}cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = m$$

$$\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{m}{2sin\frac{a}{2}} \qquad (*)$$

Esta última ecuación exige que

$$-1 \le \frac{m}{2sin\frac{a}{2}} \le 1$$

o bien

$$\frac{m^2}{4sin^2\frac{a}{2}} \le 1$$

es decir

$$m^2 \le 4sin^2\frac{a}{2}$$

Sí se satisface esta condición, la ecuación (*) determina un ángulo $\alpha = \frac{x-y}{2}$ que se obtiene con la calculadora, en seguida se transforma en la ecuación algebraica

$$\frac{x-y}{2} = 2k\pi \pm \alpha \qquad (4)$$

Además la ecuación (1) puede escribirse:

$$\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2} \qquad (5)$$

Sumando y luego restando (4) y (5) miembro a miembro, se obtiene:

$x = a/2 + 2k\pi \pm \alpha$
$y = a/2 - 2k\pi \pm \alpha$

2) Resolver el sistema
$x+y = a$
$\sin x \sin y = m$ /

3) $x+y = a$
$\cos x + \cos y = m$ /

4) $x+y = a$
$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{p}{q}$ /

5) $x + y = a$
$\tan x + \tan y = m$

6) $x + y = a$
$\tan x \tan y = m$

7) $x + y = a$
$\frac{\tan x}{\tan y} = \frac{p}{q}$