PROBLEMAS RESUELTOS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

1) Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(-3, 2) y B(7, -3)

Solución

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-3-2}{7+3} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$\text{y como m} = \tan\alpha$

entonces

$$\tan\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha = 153{,}4°$$

2) Los segmentos que una recta determina sobre los ejes X e Y son respectivamente 2 y -3. Hallar su ecuación

Solución

Usando la ecuación de segmentos tenemos

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$$

$$-3x + 2y = -6$$

$$3x - 2y - 6 = 0$$

3) Una recta pasa por el punto A(7, 8) y es paralela a la recta que pasa por los puntos C(-2, 2) y D(3, -4). Hallar su ecuación

Solución

Como la recta debe ser paralela a la que pasa por los dos puntos dados, entonces deben tener igual pendiente.

$$m_{CD} = \frac{-4-2}{3+2} = \frac{-6}{5}$$

Usando esta pendiente, el punto A y la ecuación punto pendiente, se tiene

$$y - 8 = -\frac{6}{5}(x-7)$$

$$5y - 40 = -6x + 42$$

$$6x + 5y - 82 = 0$$

4) Demostrar que los puntos A(-5, 2), B(1, 4) y C(4, 5) son colineales.

Solución

Que sean colineales significa que están ubicados sobre la misma recta es decir la pendiente entre A y B debe ser la misma que la que está entre B y C.

$$m_{AB} = m_{BC}$$

$$\frac{4-2}{1+5} = \frac{5-4}{4-1}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto son colineales

5) Hallar la ecuación de la simetral del segmento que los ejes coordenados determinan en la recta 5x + 3y – 15 = 0

Solución

Comenzaremos determinando las intersecciones de la recta con los ejes coordenados, para luego determinar el punto medio del segmento, enseguida calculamos la pendiente de la recta dada para obtener la de la perpendicular a ella para finalmente determinar la recta simetral.

Intersección eje X

$$5x - 15 = 0$$

$$x = 3$$

Intersección eje Y

$$3y - 15 = 0$$

$$3y = 15$$

$$y = 5$$

Calculamos ahora el punto medio del segmento que va desde (3, 0) a (0, 5)

$$P_M = \left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Obtenemos la pendiente de la recta dada

$$5x + 3y - 15 = 0$$

$$3y = -5x + 15$$

$$y = -\frac{5}{3}x + 5$$

La pendiente es entonces $-\frac{5}{3}$, y la pendiente de la perpendicular es $\frac{3}{5}$

Determinamos la ecuación de la recta con $m = \frac{3}{5}$ y que pasa por $\left(\frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right)$

$$y - \frac{5}{2} = \frac{3}{5}\left(x - \frac{3}{5}\right)$$

$$y - \frac{5}{2} = \frac{3}{5}x - \frac{9}{25}$$

$$50y - 125 = 30x - 18$$

$$30x - 50y + 107 = 0$$

6) Hallar la ecuación de la recta con pendiente -4 y que pasa por el punto de intersección de las rectas 2x + y – 8 = 0 y 3x – 2y + 9 = 0.

Solución

Encontramos el punto de intersección de las rectas resolviendo el sistema de dos ecuaciones

$$2x + y = 8$$

$$3x - 2y = -9$$

Despejando y en la primera y reemplazando en la segunda

y = 8 – 2x

3x – 2(8 – 2x) = -9

3x – 16 + 4x = -9

7x = 7

x = 1

y = 6

escribimos ahora la ecuación de la recta que pasa por (1, 6) con pendiente igual a – 4

y – 6 = -4(x – 1)

y – 6 = -4x + 4

4x + y = 10

7) Hallar el área del triángulo formado por los ejes coordenados y la recta de ecuación 5x + 4y + 20 = 0

Solución

Se determinan las intersecciones de la recta con los ejes coordenados.

$$4y + 20 = 0$$

$$4y = -20$$

$$y = -5$$

$$5x + 20 = 0$$

$$5x = -20$$

$$x = -4$$

$$(-4,0) \text{ y } (0,-5)$$

Luego el área es 20

Otra forma de resolver este problema es escribiendo la ecuación en la forma de la ecuación de segmentos

$$5x + 4y + 20 = 0$$

$$5x + 4y = -20$$

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{-5} = 1$$

8) Los siguientes problemas se refieren a un triángulo de vértices A(-2, 1), B(4, 7) y C(6, -3)

8.1.- Hallar las ecuaciones de sus lados

Solución

En este caso usamos la ecuación punto punto para cada par de vértices.

i) ecuación por AB

$$\frac{y-1}{7-1} = \frac{x+2}{4+2}$$

$$\frac{y-1}{6} = \frac{x+2}{6}$$

$$y - 1 = x + 2$$

$$y = x + 3$$

ii) ecuación por AC

solución

$$\frac{y-1}{-3-1}=\frac{x+2}{6+2}$$

$$\frac{y-1}{-4}=\frac{x+2}{8}$$

$$2y-2=-x-2$$

$$x+2y=0$$

iii) ecuación por BC

$$\frac{y-7}{-3-7}=\frac{x-4}{6-4}$$

$$\frac{y-7}{-10}=\frac{x-4}{10}$$

$$y-7=-x+4$$

$$x+y-11=0$$

8.2 Hallar la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela al lado BC

Solución

Determinamos la pendiente de la recta por BC y luego usando el punto A obtenemos la recta pedida

$x+y-11=0$ tiene pendiente -1, entonces

$$y-1=-1(x+2)$$

$$y-1=-x-2$$

$$x+y+1=0$$

9) Encuentre una expresión para determinar la distancia de un punto a una recta.

Solución

Sea el punto $P(x_0,y_0)$ y la recta Ax + By + C = 0.

i) Determinamos la pendiente de la recta

$$m=-\frac{A}{B}$$

ii) Obtenemos la pendiente de la recta perpendicular a ella

$$m_{\perp}=\frac{B}{A}$$

iii) Ahora calculamos la ecuación de la recta que pasa por P y con pendiente $m\perp$

$$y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0)$$

$$Ay-Ay_0=Bx-Bx_0$$

$$Bx-Ay+Ay_0-Bx_0=0$$

iv) Hallamos la intersección de las dos rectas

$$Ax+By=-C$$

$$Bx-Ay=Bx_0-Ay_0$$

Multiplicando por A la primera y por B la segunda

$$A^2x+ABy=-AC$$

$$B^2x-ABy=B^2x_0-BAy_0$$

Y sumando

$$A^2x + B^2x = B^2x_0 - BAy_0 - AC$$
$$x = \frac{B^2x_0 - BAy_0 - AC}{A^2 + B^2}$$
Ahora multiplicando por B la primera y por –A la segunda se tiene
$$ABx + B^2y = -BC$$
$$-ABx + A^2y = A^2y_0 - ABx_0$$
Sumando
$$B^2y + A^2x = A^2y_0 - ABx_0 - BC$$
$$y = \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2}$$
Luego el punto de intersección es
$$\left(\frac{B^2x_0 - BAy_0 - AC}{A^2 + B^2}, \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2}\right)$$
Ahora calculamos la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las dos rectas.
$$d = \sqrt{(x_0 - \frac{B^2x_0 - BAy_0 - AC}{A^2 + B^2})^2 + (y_0 - \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2})^2}$$
$$= \sqrt{(\frac{A^2x_0 + B^2x_0 - B^2x_0 + BAy_0 + AC}{A^2 + B^2})^2 + (\frac{A^2y_0 + B^2y_0 - A^2y_0 + ABx_0 + BC}{A^2 + B^2})^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{A^2x_0 + BAy_0 + AC}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{B^2y_0 + ABx_0 + BC}{A^2 + B^2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{A^2(Ax_0 + By_0 + C)^2 + B^2(By_0 + Ax_0 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(A^2 + B^2)(Ax_0 + By_0 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}} =$$
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
Por lo tanto la distancia de un punto a una recta puede calcularse como el cuociente entre la ecuación de la recta reemplazándole las coordenadas del punto dado y la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los coeficientes de x y de y.

10) Las coordenadas de un punto P son (2, 6) y la ecuación de una recta L es $4x + 3y = 12$. Hallar la distancia del punto P a la recta L.

Solución

Aplicando el resultado anterior se tiene que
$$d = \frac{4(2) + 3(6) - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{8 + 18 - 12}{\sqrt{25}} = \frac{14}{5}$$

11) Hallar la distancia de la recta 3x – 4y + 12 = 0 al punto (4, -1).

Solución

$$d=\frac{|3(4)-4(-1)+12|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|12+4+12|}{\sqrt{25}}=\frac{28}{5}$$

12) Determinar los valores de A y de B en la ecuación Ax – By + 4 = 0 si pasa por los puntos C(-3, 1) y D(1, 6)

Solución

Si cada uno de los puntos pertenece a la recta significa que satisfacen la ecuación de la recta, entonces

$-3A-B+4=0$ y $A-6B+4=0$

Formando el sistema de dos ecuaciones

$$-3A-B=-4$$

$$A-6B=-4$$

Despejando A en la segunda

$$A=6B-4$$

y reemplazándolo en la primera

$$-3(6B-4)-B=-4$$

$$-18B+12-B=-4$$

$$-19B=-16$$

$$B=\frac{16}{19}$$

Y reemplazando

$$A=6\cdot\frac{16}{19}-4=\frac{96-76}{19}=\frac{20}{19}$$

13) Hallar el valor de k para que la recta kx + (k – 1)y – 18 = 0 sea paralela a la recta 4x + 3y + 7 = 0

Solución

Dos rectas son paralelas si tienen igual pendiente, entonces

i) pendiente de la primera

$$-\frac{k}{k-1}$$

ii) pendiente de la segunda

$$-\frac{4}{3}$$

iii) igualándolas

$$\frac{k}{k-1}=\frac{4}{3}$$

$$3k=4k-1$$

$$k=1$$

14) Demostrar que la recta que pasa por los puntos (4, -1) y (7, 2) biseca al segmento de extremos (8, - 3) y (-4, -3)

Solución

Que biseque al segmento significa que pasa por su punto medio.

i) punto medio del segmento

$$P_M=\left(\frac{8-4}{2},\frac{-3-3}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{-6}{2}\right)=(2,-3)$$

ii) hallamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos

$$\frac{y+1}{2+1}=\frac{x-4}{7-4}$$

O bien

$$\frac{y+1}{3}=\frac{x-4}{3}$$

$$y+1=x-4$$

$$y=x-5$$

iii) y finalmente debemos probar que el punto medio encontrado pertenece a la recta, para ello lo reemplazamos en la ecuación de la recta.

$$-3=2-5$$

$$-3=-3$$

15) Reducir la recta de ecuación 5x – 7y -11 = 0 a la forma normal

Solución

Multiplicamos la ecuación por R

$$5Rx-7Ry-11R=0$$

$$\cos\alpha=5R$$

$$\sin\alpha=-7R$$

Elevando al cuadrado ambas igualdades

$$\cos^2\alpha=25R^2$$

$$\sin^2\alpha=49R^2$$

Sumando miembro a miembro

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=74R^2$$

$$1=74R^2$$

$$R^2=\frac{1}{74}$$

$$R=\pm\frac{1}{\sqrt{74}}$$

Como C es negativo tomamos el signo positivo para el radical

Y la ecuación en su forma normal es

$$\frac{5}{\sqrt{74}}x-\frac{7}{\sqrt{74}}y-\frac{11}{\sqrt{74}}=0$$

16) Hallar la distancia al origen de la recta 2x – 3y + 9 = 0

Solución 1 usando la distancia de un punto a una recta

$$d=\frac{2(0)-3(0)+9}{\sqrt{4+9}}=\frac{9}{\sqrt{13}}$$

Solución 2: sabiendo que al escribir una recta en su forma normal el término constante indica la distancia de la recta al origen.

$$2Rx-3Ry+9R=0$$
$$\cos\alpha=2R$$
$$\sin\alpha=-3R$$
$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=13R^2$$
$$1=13R^2$$
$$R=\pm\frac{1}{\sqrt{13}}$$
Como C es positivo se toma el signo negativo para el radical
$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{9}{\sqrt{13}}=0$$
Se tiene entonces que la distancia es $\frac{9}{\sqrt{13}}$

17) Determinar el valor de k para que la distancia del origen a la recta x + ky – 7 = 0 sea 2.

Solución

Usando la relación para la distancia de un punto a una recta tenemos
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$2=\frac{|0+k(0)-7|}{\sqrt{1+k^2}}$$
$$2=\frac{7}{\sqrt{1+k^2}}$$
$$\sqrt{1+k^2}=\frac{7}{2} \qquad (\ )^2$$
$$1+k^2=\frac{49}{4}$$
$$k^2=\frac{45}{4}$$
$$k=\pm\frac{3}{2}\sqrt{5}$$

18) Hallar la distancia entre las dos rectas paralelas 3x + 5y – 11 = 0, y la recta 6x + 10 y – 5 = 0.

Solución 1 (método Alamos)

Tomamos un punto de la primera recta sea este (2, 1)

Calculamos la pendiente de la segunda recta
$$m=-\frac{3}{5}$$
Obtenemos la pendiente de su perpendicular
$$m\perp=\frac{5}{3}$$
Determinamos la ecuación de la recta que pasa por (2,1) con pendiente $m\perp$
$$y-1=\frac{5}{3}(x-2)$$
$$3y-3=5x-10$$
$$5x-3y=7$$
Hallamos la intersección de esta recta con la segunda recta dada

$5x-3y=7$

$6x+10y=5$

Multiplicando por 10 la primera y por 3 la segunda

$50x-30y=70$

$18x+30y=15$

Sumando

68x=85

$x=\frac{85}{68}$

Multiplicando por 6 la primera y por – 5 la segunda

$30x-18y=42$

$-30x-50y=-25$

Sumando

$-68y=17$

$y=-\frac{17}{68}$

Finalmente calculamos la distancia entre (2, 1) y $\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right)$

$$d=\sqrt{\left(2-\frac{5}{4}\right)^2+\left(1+\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{34}{16}}=\frac{\sqrt{34}}{4}$$

Solución 2

usando el procedimiento de la distancia de un punto a una recta

Tomando el mismo punto ya escogido (2,1) calculamos la distancia de ese punto a la segunda recta dada

$$d=\frac{|6(2)+10(1)-5|}{\sqrt{36+100}}=\frac{12+10-5}{\sqrt{136}}=\frac{17}{\sqrt{136}}=\frac{17\sqrt{136}}{136}=\frac{\sqrt{136}}{8}=\frac{\sqrt{34}}{4}$$

Solución 3

escribiendo las dos ecuaciones en la forma normal y teniendo presente el hecho que el término constante de ella marca la distancia de la recta al origen y finalmente restando las dos distancias tendremos también la distancia entre las dos rectas paralelas.

Escribiendo la primera recta en la forma normal

$$\frac{3}{\sqrt{34}}x+\frac{5}{\sqrt{34}}y-\frac{11}{\sqrt{34}}=0$$

Escribiendo la segunda recta en la forma normal

$$\frac{6}{\sqrt{136}}x+\frac{10}{\sqrt{136}}-\frac{5}{\sqrt{136}}=0$$

Entonces la primera recta se encuentra a $\frac{11}{\sqrt{34}}$ unidades del origen y la segunda a $\frac{5}{\sqrt{136}}$

Finalmente restando la menor de la mayor

$$\frac{11}{\sqrt{34}}-\frac{5}{\sqrt{136}}=\frac{22-5}{\sqrt{136}}=\frac{17}{\sqrt{136}}=\frac{\sqrt{34}}{4}$$

19) Los vértices de un triángulo son A(-2, 3), B(5, 5) y C(4, -1). Hallar la ecuación del la bisectriz del ángulo interior ACB

Solución

i) encontramos las ecuaciones de los lados AC y BC

ecuación por AC

$$\frac{y-3}{-1-3}=\frac{x+2}{4+2}$$

$$\frac{y-3}{-4}=\frac{x+2}{6}$$

$$6y-18=-4x-8$$

$$4x+6y-10=0$$

$$2x+3y-5=0$$

Ecuación por el lado BC

$$\frac{y-5}{-1-5}=\frac{x-5}{4-5}$$

$$\frac{y-5}{-6}=\frac{x-5}{-1}$$

$$-y+5=-6x+30$$

$$6x-y-25=0$$

ii) Consideramos un punto $P(x,y)$ sobre la bisectriz, este punto debe cumplir la condición que debe ser equidistante de los lados AC y BC

$$\frac{6x-y-25}{\sqrt{36+1}}=-\frac{2x+3y-5}{\sqrt{4+9}}$$

$$\frac{6x-y-25}{\sqrt{37}}=-\frac{2x+3y-5}{\sqrt{13}}$$

$$6\sqrt{13}x-\sqrt{13}y-25\sqrt{13}=-2\sqrt{37}x-3\sqrt{37}y+5\sqrt{37}$$

$$\left(6\sqrt{13}+2\sqrt{37}\right)x+\left(3\sqrt{37}-\sqrt{13}\right)y-5\sqrt{37}-25\sqrt{13}=0$$

El signo menos se debe a que se encuentran en lados opuestos del origen